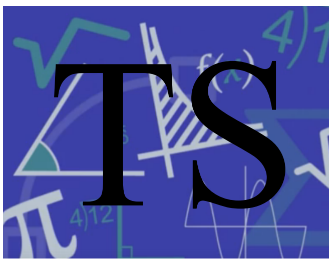
Lycée d'enseignement général et technologique Jean Ricard

académie Nice

éducation nationale enseignement supérieur recherche

Bien préparer sa rentrée en TS

Mathématiques



math

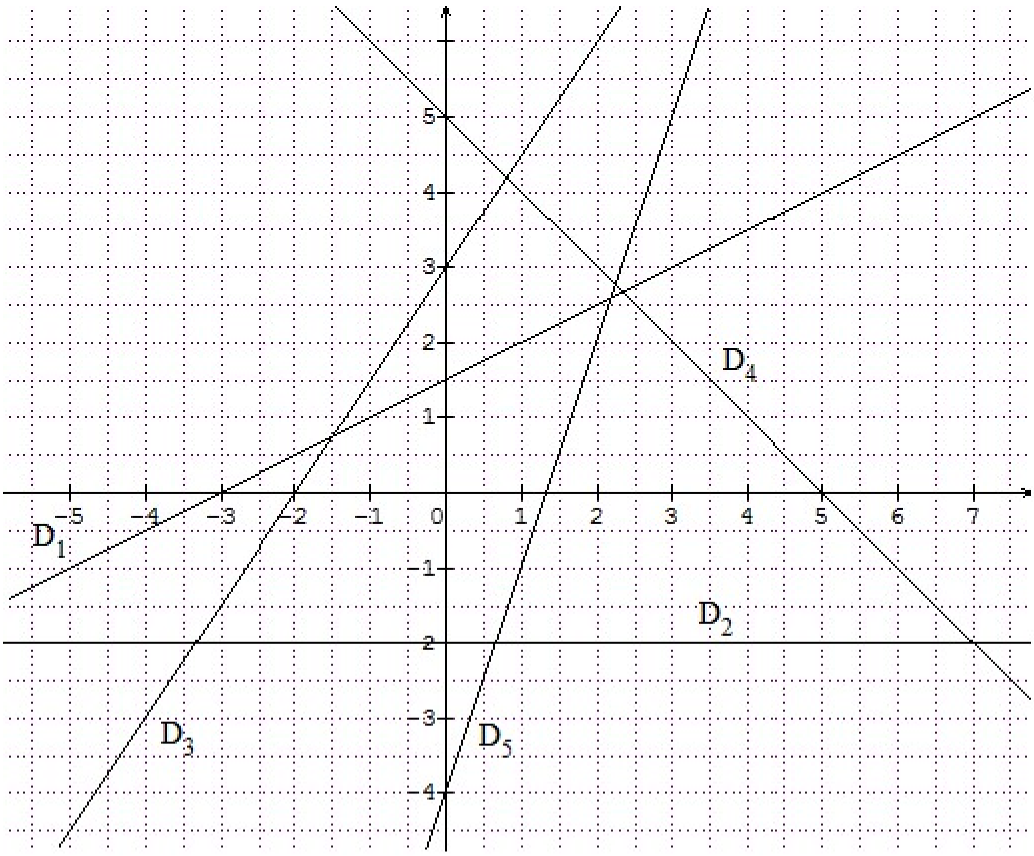
Thème 1: Fonctions

Savoir faire :

– Signe d'un polynôme du second degré, factorisation
– Utiliser le sens de variation pour comparer l'image de deux nombres
– Formules de dérivées + calcul de dérivées
– Equation de la tangente à la courbe de f en a
– Lecture graphique du nombre dérivé d'une fonction en a (coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a)
– Etude des variations d'une fonction

Exercice 1 :

1) Donner l'équation des droites suivantes :



2) Déterminer par le calcul, les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_3 puis de D_4 et D_5.

Exercice 2 :

1. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes et en déduire l'extremum sur $\mathbb{R}$.

   a. $g(x)=x^2+4x-6$ b. $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+6x-7$.
   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Donner les solutions de l'équation $f(x)=-10$.
   d. Donner les solutions de l'équation $f(x)=17$.
   e. Donner les solutions de l'inéquation $f(x)>-20$.

Exercice 3 :

Partie A

Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x)=-x^2+x+2$; $g(x)=x^2+5x+1$; $h(x)=2x^2-3x-12$

$k(x)=x^2+x+1$; $j(x)=-3x^2+2x-3$; $s(x)=4x^2-2x+9$

$t(x)=-9x^2+6x-1$

Puis tracer, à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative des fonctions et vérifier vos résultats.

Partie B

Factoriser lorsque c'est possible :

$f(x)=x^2+x-6$; $g(x)=x^2+x+1$; $h(x)=-3x^2-21x-30$

Exercice 4 :

Calculer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3-2x^2+\dfrac{1}{2}x-1$

b) g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2\sqrt{x}$

c) h est définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{5x+1}{x+3}$

d) k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=(2x-3)(1-x^2)$

Exercice 5 :

on considère l'algorithme ci-contre :

a) Faire fonctionner cet algorithme avec $x=5$, $x=6$, $x=1$, $x=-5$; $x=10$

b) Que fais cet algorithme ?

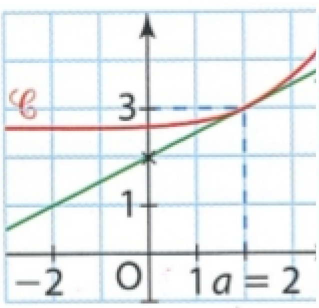
c) Recopier et modifier cet algorithme afin que celui-ci affiche l'image d'une nombre x par la fonction définie f par morceau : $\begin{cases} si\ x\leqslant 2\ alors\ f(x)=2+x \\ si\ x>2\ alors\ f(x)=8-2x \end{cases}$

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  image_de_x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  SI (x-1<0) ALORS
    DEBUT_SI
    image_de_x PREND_LA_VALEUR -(x-1)
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      image_de_x PREND_LA_VALEUR x-1
      FIN_SINON
  AFFICHER image_de_x
FIN_ALGORITHME
```

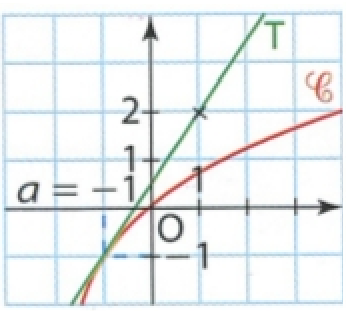
Exercice 6:

Dans chaque cas suivant, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Déterminer $f'(a)$ et donner une équation de T.

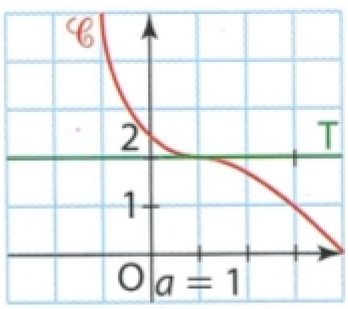
a)



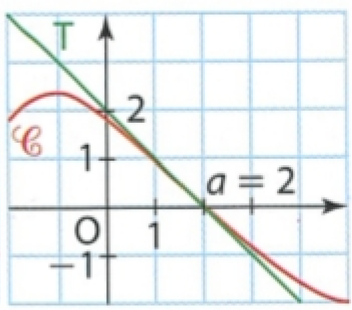
b)



c)

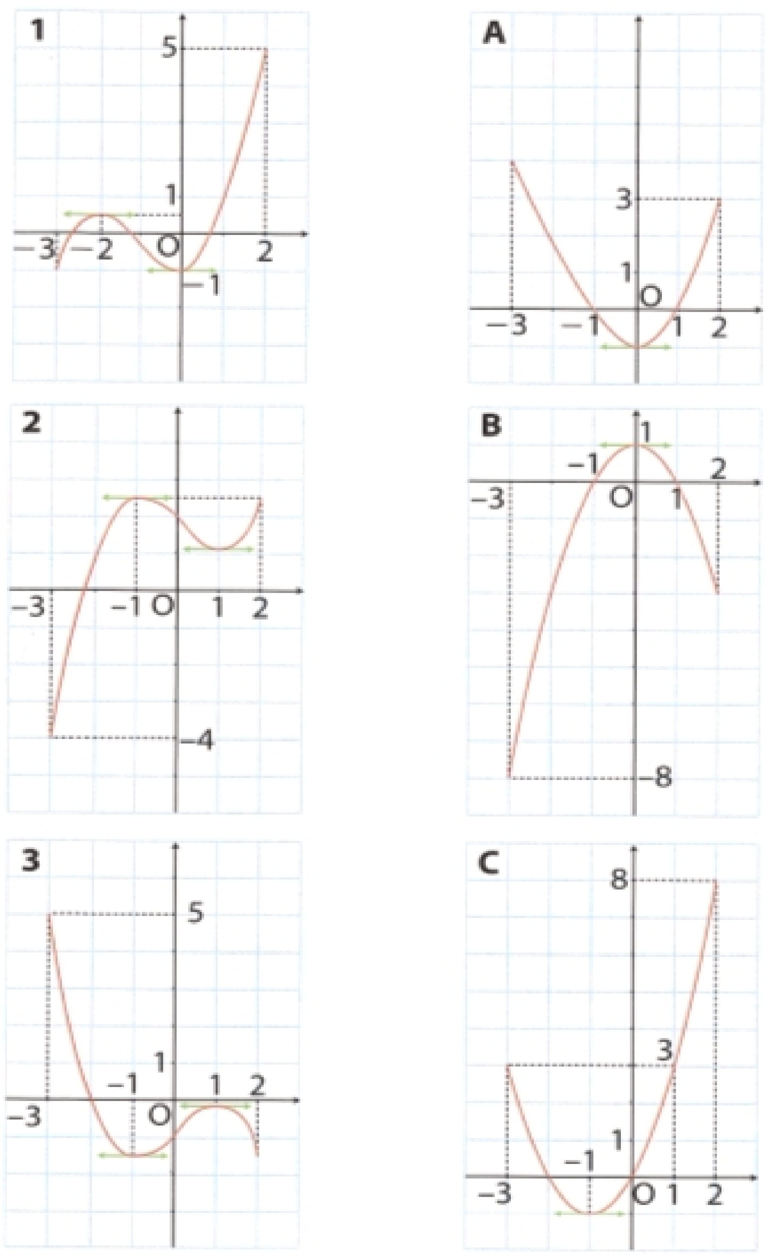


d)



Exercice 7 : Les courbes 1,2,3 ci-contre représentent des fonctions f , g , h et les courbes A,B,C représentent leurs fonctions dérivées f' , g' , h' dans un repère.

Faire correspondre chaque fonction avec sa fonction dérivée, en expliquant son choix.



Exercice 8 :

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Tracer la courbe représentative de f à l'écran de la calculatrice et vérifier la cohérence avec le tableau.

a) $f(x)=x^3-3x$ b) $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x-6x$ c) $f(x)=x(2-x)^2$

Exercice 9.

Même exercice, en tenant compte du domaine de définition de f

a) $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, D=]$-\infty$;3[U]3;$+\infty$[

b) $f(x)=\frac{-5x+2}{2x+1}$, D$=\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$

Exercice 10 :

Soit f une fonction définie sur $[-4;5]$ par $f(x)=2x^3-3x^2-1$.
Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
A partir du tableau de variations de f, conjecturer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 dans $[-4;5]$. On notera α cette solution .
En utilisant le tableau de variations, déterminer le signe de f(x) sur $[-4;5]$
Soit F une fonction telle que F'(x)=f(x). Déterminer les variations de F.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+1$
Dans un repère, C_f est la courbe représentative de f.

1.a) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
b) Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe C_f et la tangente T. Conjecturer la position de C_f par rapport à T.

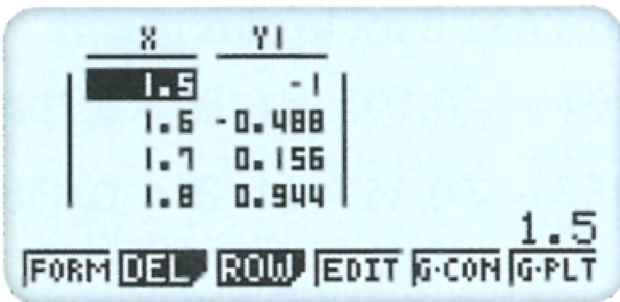
2. On considère le fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-(4x-7)$
a) Déterminer la fonction dérivée de g.
b) Pour tout nombre réel x , déterminer le signe de $g'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de g .

3.a) Calculer $g(-2)$. Déterminer, pour tout nombre réel x , le signe de $g(x)$.
b) En déduire alors la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T.

Exercice 12 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-1$.
1.a) Dresser le tableau de variations de f .
b) Tracer la courbe représentative de f à l'écran de la calculatrice.

2.a) On admet que l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Expliquer pourquoi α appartient à l'intervalle $[1;2]$.
b) Avec la calculatrice, on a construit une table de valeurs de f . En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.



X	Y1
1.5	-1
1.6	-0.488
1.7	0.156
1.8	0.944

c) Déterminer pour tout nombre réel x le signe de de $f(x)$.

3) g est la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1-x}{1+x^3}$.
a) Pour tout nombre réel x différent de -1, calculer $g'(x)$.
b) A l'aide des résultats obtenus à la question 2.c), dresser le tableau de variation de g .

Thème 2: Suites

Exercice 1

Calcule les cinq premiers termes de la suite (u_n), puis exprime le terme u_{n+1} en fonction de n.

a) Pour tout entier naturel n, $u_n=-2n+3$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n=2n^2-4n+5$.

c) Pour tout entier naturel n, n ⩾ 1, $u_n=\frac{(-2)^n}{n}$.

Exercice 2 :

1) (v_n) est une suite telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\frac{1}{1+v_n}$.

On sait que $v_0=2$, calculer v_1, v_2 et v_3.

2) (u_n) est une suite telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2u_n-1$.

On sait que $u_2=4$, calculer u_0, u_1 et u_3.

Exercice 3:

Dans les cas suivants, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, conjecturer son sens de variation.
- Démontrer cette conjecture en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$.

a) $u_n=-2n+3$ b) $u_n=\frac{1}{4}n-7$; c) $u_n=-n^2+7$; d) $u_n=\frac{3}{n+4}$

Exercice 4:

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{3^n}{5^{n+2}}$.

a) Afficher à l'écran de la calculatrice les premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n).

b) Pour tout entier naturel n, exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

c)En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier n par : U_{n+1} = [illegible] U_n+1 ; $U_0 = 4$

1)Calculer les 5 premiers termes de la suite.

2)Dans un repère tracer les droites d'équations y=x et y= [illegible] x+1 ; puis représenter les 5 premiers termes de la suite (U_n).

Conjecturer le sens de variations et la limite de la suite (U_n) .

3)Soit (V_n) la suite définie par $V_n= U_n-2$ pour tout entier n.

a)Montrer que la suite (V_n) est une suite géometrique de raison [illegible] et de premier terme à déterminer.

b)Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

c)Déterminer le sens de variation de (V_n) puis celui de la suite (U_n).

4)Démontrer d'une autre manière le sens de variations de (U_n).
5)Soit $T_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ et $S_n = U_0+U_1+U_2 +...+U_n$.
Exprimer T_n et S_n en fonction de n.

Exercice 6 :

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier n par :
$U_0 = 9$ et $U_{n+1} = U_n +3n+2$, et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1)Montrer que la suite (V_n) est un suite arithmétique.
2)On pose $S_n = V_0+V_1+...+V_n$.
.a) Calculer Sn en fonction de n.
.b) Montrer que $S_n= U_{n+1}-U_0$.
.c) En déduire l'expression de U_{n+1} en fonction de n puis celle de U_n.

Exercice 7 :

Soit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison -5 et de 1er terme $u_1=72$.

1)Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2)Exprimer u_n en fonction de n . En déduire le dix-septième terme de la suite.

3)On considère l'algorithme ci-contre. Qu'affiche-t-il quand on le fait fonctionner ? Quel est le but de cet algorithme ?

4)Calculer $u_1+u_2+\ldots+u_{17}$.

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 72
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (U>=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR U-5
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 8 :

Soit la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $1,2$ et de 1er terme $u_0=10000$.

1)Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2)Exprimer u_n en fonction de n . En déduire le septième terme de la suite.

3)A partir de quel rang tous les termes u_n semblent-ils tous supérieurs ou égaux à 10^5 ? Ecrire un algorithme qui répond au problème (on pourra s'inspirer de l'algorithme de l'exercice 7).

4)Calculer $u_0+u_1+\ldots+u_{10}$.

Exercice 9 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Géométriques ? Justifier. Dans l'affirmative, vous donnerez la raison, vous étudierez le sens de variation et la convergence.

$u_n=\frac{n}{2}-3$ Pour $n\in\mathbb{N}$; $u_n=\frac{2}{3^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}=\frac{3u_n}{4}$ et $u_0=2$; $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=(u_n)^2-u_n+1 \end{cases}$

<u>Exercice 10 :</u>

Partie A On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement	Affecter à U la valeur 3
	Pour k allant de 0 à N
	Affecter à U la valeur $\frac{1}{4}U+3$
	Fin pour
Sortie	Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 2? (justifier)

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1)a)Calculer u_1 et u_2 .

b)Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2)Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-4$.

a)Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b)Donner l'expression de v_n en fonction de n , et en déduire que $u_n=4-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel.

c)Montrer que (u_n) est une suite croissante.

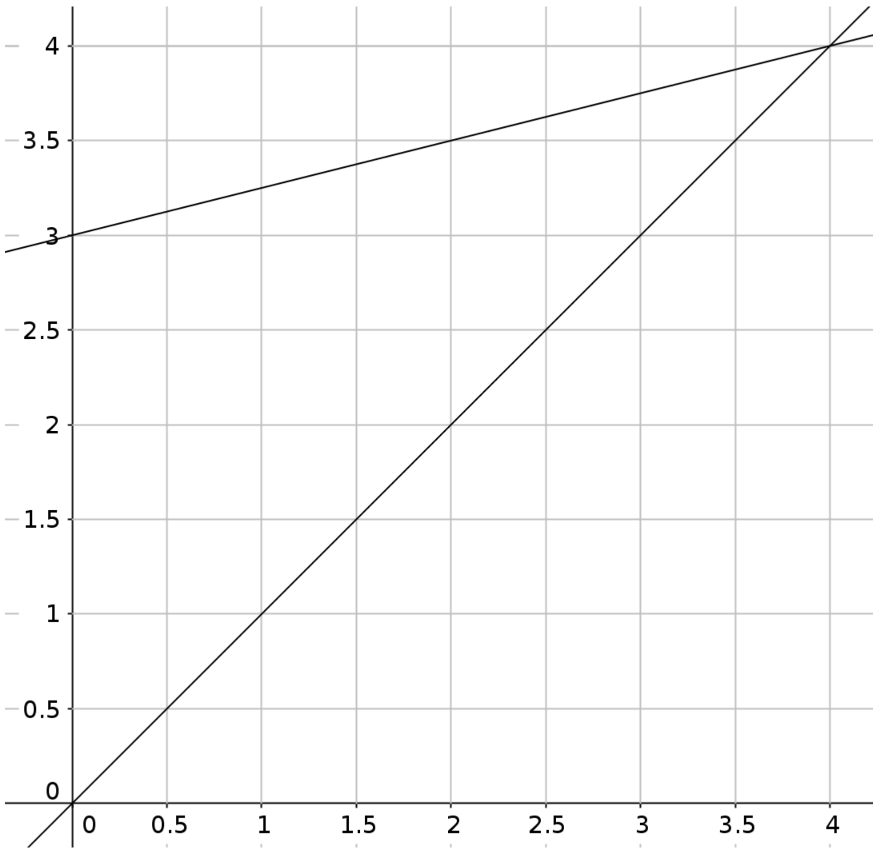
Partie C

1)On a tracé dans un même repère les droites d'équations respectives :

$y=x$ et $y=\frac{1}{4}x+3$. Construire les trois premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Conjecturer le comportement à l'infini de la suite (u_n) .

2)Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n tel que $u_n>3,99$.

3)Modifier l'algorithme pour qu'il affiche en sortie la valeur du plus petit entier n tel que $u_n>3,99$.



Thème 3: Trigonométrie.

Valeurs remarquables à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice 1 :

A l'aide du cercle trigonométrique, compléter le tableau suivant :

x	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	-5π	$-\frac{17\pi}{2}$	$\frac{25\pi}{3}$	$\frac{-17\pi}{6}$	16π	$-\frac{15\pi}{4}$
cos(x)									
sin(x)									

Exercice 2 :

1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathbf{cos}(x)=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ **.**Donner les solutions appartenant à $[\mathbf{-2\pi\ ;4\pi}]$.

2)Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'inéquation $\cos(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

3)Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'inéquation $\sin(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) α est un réel tel que $\pi\leqslant\alpha<2\pi$ et $\cos(a)=\frac{3}{5}$. Déterminer la valeur exacte de $\sin(a)$.

Exercice 3 :

1)Rappeler les formules $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

2)En déduire l'expression de $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

3)Rappeler $\sin(2a)$ et donner 2 expressions différentes de $\cos(2a)$.

4)En utilisant $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en remarquant que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Thème 4: probabilités.

Exercice1 :

Un avion possède deux moteurs identiques : La probabilité que chacun d'eux tombe en panne est 0,001. On suppose que la panne d'un moteur n'a aucune influence sur la panne de l'autre.
Construire un arbre pondéré permettant de déterminer :
a) La probabilité que les deux moteurs tombent en panne.
b) La probabilité qu'aucun moteur ne tombe en panne.

Exercice 2 :

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs : 3 billets donnent droit à 4 places gratuites ; 6 à deux places gratuites ; 42 à une place gratuite. Les autres billets ne gagnent rien. On note X la variable aléatoire associant à chaque billet le nombre de places gratuites.
1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart−type de X.

Exercice 3 :

Un commercial d'une entreprise doit rendre visite à 10 clients dans une journée. Chacune de ces 10 visites est indépendante des autres. Le commercial a constaté que la probabilité pour qu'il rencontre effectivement le client lors d'une visite est de $0{,}8$. Soit X le nombre de clients effectivement rencontrés.
1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Donner la probabilité que le commercial rencontre effectivement au moins un client.
3. Donner la probabilité qu'exactement 5 clients soit rencontrés.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que la moitié au moins des clients soit rencontrée.
5. Combien de clients le commercial peut−il espérer rencontrer au cours de sa journée ?

Exercice 4 :

1) La probabilité qu'un joueur de foot soit droitier est de 0,85. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gaucher dans une équipe de 11 joueurs.
2) Clara joue au Basket et exécute une série de lancers francs. Sa probabilité de réussite est de 0,15 pour chaque lancer franc et on suppose qu'elle ne varie pas au cours des lancers.
a) Quelle est la probabilité P_n qu'elle ne réussisse aucun lancer franc sur n lancers ?
b) A l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que P_n soit inférieure à 0,01.

Thème 5: géométrie vectorielle.

Exercice1 :
Soit ABCD un parallélogramme et E un point du plan n'appartenant pas à la droite (DC).
Soit F le point défini par $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
Monter que DEFC est un parallélogramme.

Exercice 2 :
Le plan est muni d'un repère (O,I,J). Soit A(1;1) , B(2;−1) , C(3;2) .
1) Déterminer les coordonnées de P tel−que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
2) Construire le point D tel−que $\overrightarrow{AD}=1,5\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$
3) Calculer la norme de $\overrightarrow{AB}$ puis de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CP}$

Exercice 3 :

Soit ABCD un parallélogramme . Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{DE}=3\,\overrightarrow{DC}$
et $\overrightarrow{AF}=-1,5\overrightarrow{AD}$
1) Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$.
2) Démontrer que les points B,F et E sont alignés

Exercice 4 :

1) ABCD est un carré de côté 5, calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BD}$
2) ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On suppose que AB=6
BH=4 , HC=5 . Calculer $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$.

Exercice 5 :
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On considère les points $A(-1;-4)$, $B(2;1)$ et $C(2;-5)$.
1. Faire une figure.
2 a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b. Calculer les longueurs des segments [AB] et [AC].
c. En déduire la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$. Donner une valeur arrondie à 10^{-1} en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
3 a. Déterminer une équation de la droite (AB).
b. Déterminer une équation de la hauteur issue C du triangle ABC .
c. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB).